2 TRIGONOMÉTRIE

Ce paragraphe rappelle l'essentiel des relations trigonométriques utiles au topographe.

2.1 Cercle trigonométrique

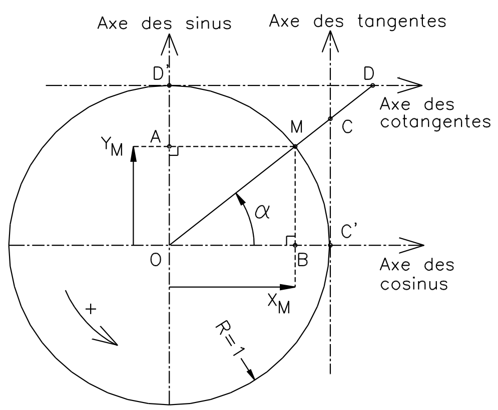

Fig. 5.1-c. : Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique ci-contre (fig. 5.1-c.) est de rayon 1, c'est-à-dire : R = OM = 1.

En mathématique, le sens de rotation positif est dit trigonométrique et correspond au sens de rotation inverse horaire. Les angles sont exprimés en radians.

Par définition, le cosinus de l'angle α est la projection sur l'axe des abscisses x de l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{OM}$, le sinus étant la projection sur l'axe des ordonnées y :

$$\boxed{\cos\alpha = X_M \text{, et } \sin\alpha = Y_M}$$

On définit ensuite : $$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{, et } \operatorname{cotan}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}}$$

◆ ***utilisation en topographie***

Ces relations servent à calculer les éléments d'un triangle rectangle, par exemple le triangle OMA ou le triangle OMB de la figure 5.1-c. dont on connaît au moins deux données : une longueur et un angle, ou bien deux longueurs. La connaissance de deux angles est insuffisante car il y a alors une infinité de solutions (voir paragraphe 3.3.4.).

On identifie les sinus, cosinus, tangente et cotangente de la manière suivante (fig. 5.2.) :

$$\sin\alpha = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{hypothénuse}} = \frac{MB}{OM}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha}{\text{hypothénuse}} = \frac{OB}{OM}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha} = \frac{MB}{OB}$$

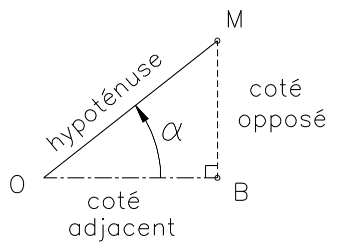

Fig. 5.2. : Triangle rectangle

Remarques

- La cotangente est l'inverse de la tangente $\text{cotan}\,\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$. Son seul intérêt est la simplification de certaines formules littérales. Pour les calculs, la seule connaissance de la tangente est suffisante.
- Sur la calculatrice, la fonction cotangente n'apparaît généralement pas et s'obtient par **1/tan**, soit la combinaison de la fonction **tangente** suivie de la fonction **1/x** et **surtout pas** $\tan^{-1}(\ )$ qui est la fonction réciproque de tan.
- **Attention** donc à ne pas confondre sur votre calculatrice la fonction $\tan^{-1}(\ )$ avec la fonction cotangente (1 / tangente) ; $\tan^{-1}(\ )$ représente la fonction (arc tangente) réciproque de (tangente) qui permet d'extraire l'angle α dont la tangente prend une certaine valeur X : $\tan^{-1} X = \alpha$ donc $X = \tan\alpha$, avec $X \in \ ]-100{,}100[$ gon.

Nous reviendrons au paragraphe 1.3. sur le fait que la solution de $\tan^{-1} X = \alpha$ ne donne que la racine comprise entre –100 et 100 gon. Il en est de même pour $\sin^{-1} X = \alpha$ (voir paragraphe 3.3.5.).

Application

Trouvez graphiquement sur le cercle trigonométrique puis vérifiez sur votre calculatrice que l'angle dont la tangente a pour valeur 1 est 50 gon.

2.2 Relations trigonométriques de base

Les relations suivantes sont utiles au déroulement de certains calculs littéraux :

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1\\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha\\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\end{aligned}\right\} \text{ Voir } \textit{fig.}\ 5.3.$$

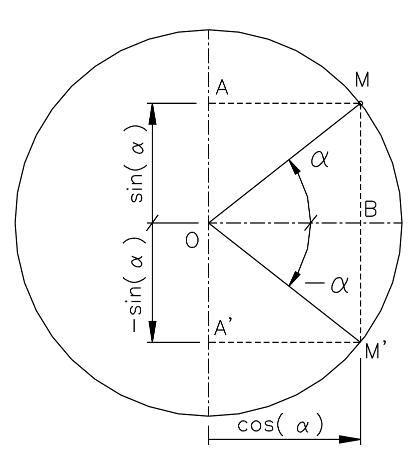

Fig. 5.3. : Relations trigonométriques

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

Application

1 - Donnez une expression simplifiée de $\tan(a + b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.

2 - Exprimez $\sin(a - b)$ et $\cos(a - b)$.

3 - Exprimez $\sin(2.a)$ et $\cos(2.a)$.

Réponse

1 - $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$

2 - $\cos(a - b) = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b$ et $\sin(a - b) = \sin a \,.\, \cos b - \sin b \,.\, \cos a$

3 - $\cos(2\,.\,a) = 2\,.\,\cos^2 a - 1 = 1 - 2\,.\,\sin^2 a$ et $\sin(2\,.\,a) = 2\,.\,\sin a \,.\, \cos a$

2.3 Identités remarquables

La figure 5.4. permet de retrouver les identités remarquables suivantes : on y représente un point M sur le cercle trigonométrique et sa projection sur les axes des sinus et cosinus, correspondant à l'angle α.

A partir de là, par symétries horizontales et verticales, on construit les projections correspondantes aux angles $100 - \alpha$, $100 + \alpha$, $200 - \alpha$, $200 + \alpha$, $300 - \alpha$, $300 + \alpha$, et $-\alpha$.

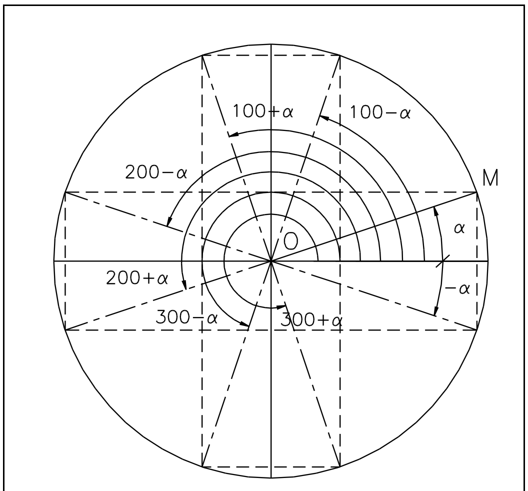

Fig. 5.4. : Identités remarquables

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Donc : $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

et $\text{cotan}(-\alpha) = -\text{cotan}\alpha$

$\sin(100 - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(100 - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(\alpha + 100) = \cos\alpha$

$\cos(\alpha + 100) = -\sin\alpha$

$\sin(200 - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(200 - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha + 200) = -\sin\alpha$

$\cos(\alpha + 200) = -\cos\alpha$

$\sin(300 - \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(300 - \alpha) = -\sin\alpha$

$\sin(300 + \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(300 + \alpha) = \sin\alpha$

Application

Simplifier les expressions suivantes : $\tan(100 - \alpha)$; $\tan(100 + \alpha)$; $\tan(200 + \alpha)$

Réponses

$\tan(100 - \alpha) = \text{cotan}\alpha$; $\tan(100 + \alpha) = -\text{cotan}\alpha = \tan(\alpha - 100)$

$\tan(200 + \alpha) = \tan\alpha = -\tan(200 - \alpha)$

Remarque

Les identités remarquables précédentes permettent de soulever le problème suivant : calculez sur votre calculatrice l'angle dont le sinus est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$; elle donne le résultat : 50 gon. Or cette solution n'est pas unique : l'angle (200 – 50 = 150 gon) possède le même sinus puisque, comme démontré ci-dessus, $\sin(200 - \alpha) = \sin\alpha$. La fonction **sin^{-1} ( ) (arc sinus,** notée **asin)** des calculatrices est programmée pour ne donner qu'une seule des deux racines possibles, celle qui est comprise entre –100 et 100 gon. Cela peut entraîner des erreurs de résolution car, dans certains cas, c'est l'autre racine qui correspond au problème à résoudre (voir § 3.3.5). Le même problème se pose avec la fonction **tan^{-1} ( )** puisque $\tan(200 + \alpha) = \tan\alpha$.

Donc attention : chaque fois que vous utilisez ces deux fonctions, des vérifications s'imposent, soit sous forme de double calcul, soit sous forme de schéma pour choisir la racine possible.

Notez que ce problème ne se pose pas pour la fonction **cos^{-1} ( )** puisque si la première racine possible est α compris entre 0 et 200 gon, la seconde racine possible est $-\alpha$ qui est négative puisque $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$. Il n'y a donc pas d'ambiguïté dans ce cas et il est toujours préférable d'utiliser $\cos^{-1}$ ( ) plutôt que $\sin^{-1}$ ( ) ou $\tan^{-1}$ ( ).

2.4 Relations diverses

2.4.1 Développements limités

Pour a proche de zéro, on a : $(1 + a)^n \approx 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3 + \ldots$

Pour α proche de 0 radians, on peut écrire : $\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots$

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \ldots$$

$$\tan\alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{15} + \ldots$$

2.4.2 Dérivées

Les relations suivantes ne sont exactes que pour un angle α exprimé en radians.

$\sin'\alpha = \cos\alpha$; $\cos'\alpha = -\sin\alpha$; $\tan'\alpha = 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

$\arcsin'\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ et $\arctan'\alpha = \dfrac{1}{1+\alpha^2}$.

Si l'angle α est exprimé en gon, il faut donc le transformer en radians avant d'utiliser ces formules. Elles deviennent dans le cas d'un angle α exprimé en gon :

$\sin'\alpha_{gon} = \dfrac{\pi}{200} \cdot \cos\alpha_{gon}$ $\quad \cos'\alpha_{gon} = -\dfrac{\pi}{200} \cdot \sin\alpha_{gon}$ $\quad$ etc.

2.4.3 Paramétrages

Si l'on pose $t = \tan(\alpha / 2)$, on obtient les expressions paramétrées suivantes :

$\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $\tan\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

3 PROPRIÉTÉS DU CERCLE

Ce paragraphe contient une liste non exhaustive des principales propriétés du cercle utilisées en topographie.

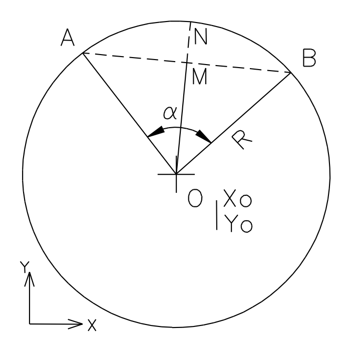

Fig. 5.5. : Arc, flèche et corde

3.1 Équation

En topographie, on utilise rarement le cercle en faisant référence à son équation. Rappelons toutefois que l'équation d'un cercle de centre O (Xo , Yo) et de rayon R (fig. 5.5.) est :

$$(X - Xo)^2 + (Y - Yo)^2 = R^2$$

3.2 Arc, flèche, corde

On peut faire l'analogie avec l'arc d'un archer (voir fig. 5.5.)

- On appelle **arc** la partie circulaire AB, notée $\overset{\frown}{AB}$, d'angle au centre α.
- On appelle **corde** la longueur du segment [AB].
- On appelle **flèche** la longueur du segment [MN].

Les relations entre ces éléments sont les suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} AB &= 2R \cdot \sin(\alpha/2) \\ MN &= R - R \cdot \cos(\alpha/2) \\ \widehat{AB} &= R \cdot \alpha_{radian} = R\,\frac{\pi}{200}\,\alpha_{gon} \end{aligned}}$$

Application

Calculez l'arc, la corde et la flèche interceptés par un angle au centre de 50 gon dans un cercle de rayon 15,00 m.

Réponses

Arc = 11,78 m ; corde = 11,48 m ; flèche = 1,14 m.

3.3 Théorie des arcs capables

3.3.1 Angle entre corde et tangente

L'angle entre la corde AB et la tangente au cercle en A (ou en B) vaut $\alpha/2$ (fig. 5.6.).

Démonstration : le triangle AOB étant isocèle, on en déduit que $\widehat{BAO} = \widehat{ABO} = \dfrac{200 - \alpha}{2} = 100 - \dfrac{\alpha}{2}$. La tangente en A au cercle étant perpendiculaire au rayon AO, il vient que l'angle entre la tangente et la corde est $\alpha / 2$. Le même raisonnement s'applique en B.

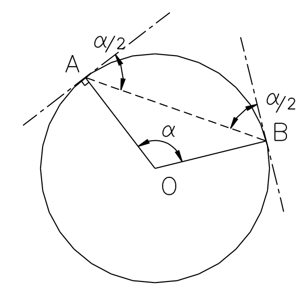

Fig. 5.6. : Arc capable AB

3.3.2 Angle vu depuis le cercle et angle au centre

L'angle $\widehat{ANB}$ est appelé angle du cercle interceptant l'arc AB (fig. 5.7.).

L'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Il existe entre ces deux angles la relation suivante : $\boxed{\widehat{ANB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}}$

Démonstration : le rayon ON est perpendiculaire à la tangente tt′.

Autour de O, on a : $\widehat{AOB} = \alpha = 400 - (\alpha_1 + \alpha_2)$

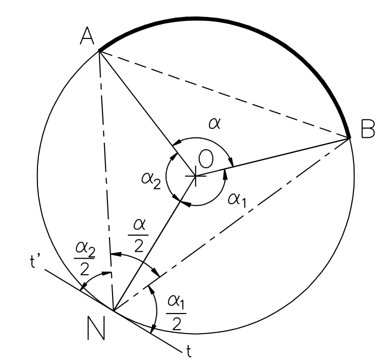

Fig. 5.7. : Angle au centre α

Autour de N, on a : $\widehat{ANB} = 200 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\alpha}{2}$

Cette démonstration est indépendante de la position du point N, situé sur l'arc complémentaire de AB. Donc tout point N de l'arc extérieur à l'arc AB intercepté par l'angle au centre α vérifie la relation précédente (voir fig. 5.8.).

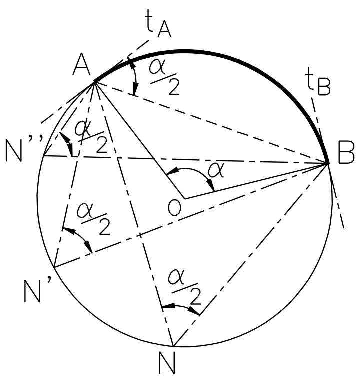

Fig. 5.8. : Propriété du cercle

Les angles issus de points situés sur un cercle et interceptant un même arc de ce cercle sont égaux entre eux et égaux à la moitié de l'angle au centre.

On constate aussi sur la figure 5.8., que lorsque N tend vers A (ou B), l'angle en N tend à devenir l'angle entre corde et tangente dont nous avons déjà démontré au paragraphe 2.3.1. qu'il vaut $\alpha/2$.

On peut en déduire, pour tout point M de l'arc AB que (fig. 5.9-a.) :

$$\boxed{\widehat{AMB} = 200 - \frac{\widehat{AOB}}{2} = 200 - \frac{\alpha}{2} = 200 - \widehat{ANB}}$$

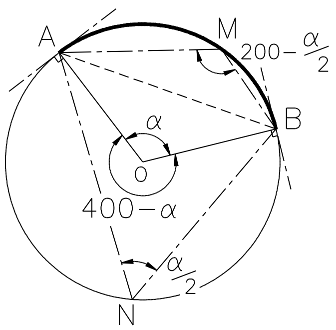

Fig. 5.9-a : Démonstration

Démonstration :

L'angle complémentaire à l'angle α intercepte l'arc complémentaire de l'arc AB intercepté par l'angle α. Donc l'angle au point M interceptant ce même arc complémentaire a pour valeur : $(400 - \alpha) / 2 = 200 - \alpha / 2$.

3.3.3 Arc capable

Soient deux points fixés A et B. L'ensemble des points N tels que l'angle $\widehat{ANB}$ soit égal à une valeur donnée α est représenté par l'arc AB (en trait continu sur la figure 5.9-b.). Cet arc est appelé arc capable associé à l'angle α.

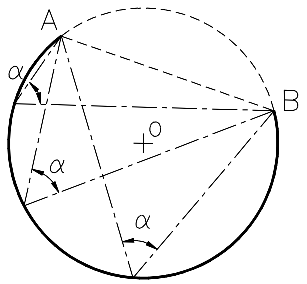

Fig. 5.9-b. : Arc capable

3.4 Puissance d'un point par rapport à un cercle

La puissance du point A par rapport au cercle (C), de centre O et de rayon *R*, est par définition le produit (AM.AN). Ce produit est constant et indépendant de la droite (D) issue du point A et sécante au cercle (C) (fig. 5.10.).

La puissance de A par rapport à (C) est : $\boxed{AM.AN = (d^2 - R^2).}$

d représente la distance OA.

Démonstration :

$AM = AH - HM$
$AN = AH + HN$

$AM \,.\, AN = AH^2 + AH \,.\, (HN - HM) - HM \,.\, HN$

$AH^2 = d^2 - OH^2$
$HM = HN$

$R^2 = OH^2 + HM^2$

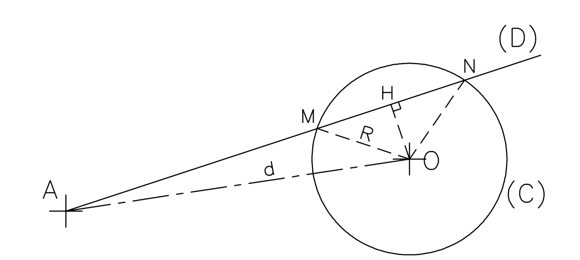

Fig. 5.10. : Puissance d'un point par rapport à un cercle

On obtient donc, après simplifications : $AM \,.\, AN = d^2 - R^2$. Cela est vrai pour toute droite (D) issue du point A et sécante au cercle (C).

3.5 Cercles homothétiques

Soient deux droites (SA) et (SB) concourantes au sommet S (fig. 5.11.). On cherche le cercle (C′) tangent intérieurement à ces deux droites et passant par le point P′.

Le point P′ est donné par les cotes ST_1 et T_1P'. On connaît le sommet S et l'angle α.

On fait intervenir le cercle de rayon *R* et de centre O tel que le point O soit sur le prolongement de T_1P' (cercle tangent à SB en T_1).

Dans les triangles SPO et SP′O′, on peut écrire : $\dfrac{SP}{SP'} = \dfrac{SO}{SO'} = \dfrac{R}{R'}$.

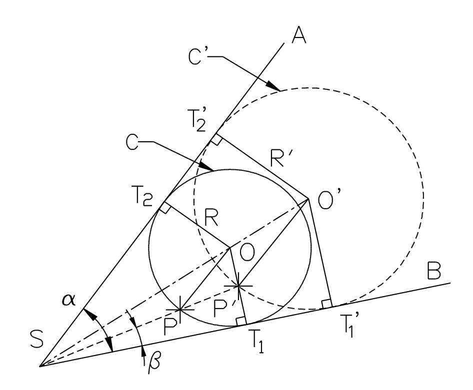

Fig. 5.11. : Cercles homothétiques

Dans les triangles semblables ST_1O et $ST_1'O'$, on peut écrire : $\dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{ST_1}{ST'_1} = \dfrac{R'}{R}$.

Comme $\sin(\widehat{SPO}) = \dfrac{\sin(\widehat{PSO})}{R}\,SO = \dfrac{\sin(\widehat{PSO})}{R'}\,SO' = \sin(\widehat{SP'O'})$, on peut dire que les segments [OP] et [O′P′] sont parallèles : on dit que le cercle (C) est homothétique du cercle (C′), homothétie de centre S.

On en déduit $R = ST_1 \,.\, \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$, $SO = ST_1 / \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ et β tel que $\tan\beta = \dfrac{T_1P'}{ST_1}$.

Il reste à résoudre le triangle SPO dont on connaît un angle et deux côtés (voir § 4.3.5.).

Cet exercice est résolu à l'aide d'une autre méthode au paragraphe 5.6. du chapitre 4.

4 RELATIONS DANS LES TRIANGLES

4.1 Relations de base

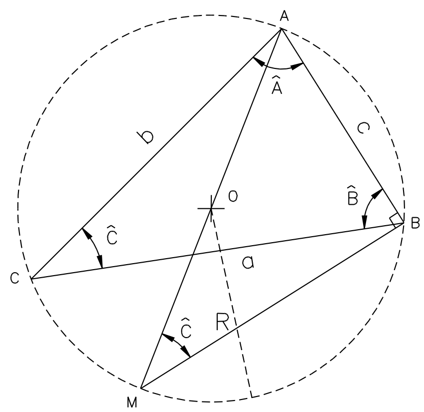

Fig. 5.12. : Relation des sinus

Seules les plus utilisées sont étudiées.

La notation ci-contre (fig. 5.12.) est toujours respectée : le côté de longueur *a* est opposé à l'angle $\widehat{A}$, *b* opposé à l'angle $\widehat{B}$ et *c* à l'angle $\widehat{C}$.

4.1.1 Somme des angles Internes

$$\boxed{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 200 \text{ gon}}$$

4.1.2 Relation des sinus

Soit le triangle ABC ci-dessus (fig. 5.12.) inscrit dans le cercle de centre O et de rayon *R*. Si l'on fait intervenir le triangle ABM tel que la droite AM passe par le centre O du cercle, on retrouve en M l'angle $\widehat{C}$ puisque les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABM}$ interceptent la même corde AB (voir § 3.3.2.).

De plus, l'angle $\widehat{ABM}$ est égal à 100 gon (c'est le cas particulier du paragraphe 3.3.2. où l'angle γ est égal à 100 gon).

Donc dans le triangle rectangle ABM, on a $\sin\widehat{C} = \frac{c}{2R}$.

Cette relation peut se démontrer pour chaque côté du triangle et comme la quantité $2R$ est une constante, on en déduit la relation des sinus exprimée ci-contre :

$$\boxed{2R = \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}}$$

Le cercle de rayon R est appelé cercle circonscrit au triangle ABC.

4.1.3 Relation des cosinus

Dans le même triangle ABC (fig. 5.13.), si l'on trace la perpendiculaire à AB passant par C (hauteur), on peut écrire :

$$\boxed{c = a \cdot \cos\widehat{B} + b \cdot \cos\widehat{A}}$$

De même, sur les autres côtés, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} b &= c \cdot \cos\widehat{A} + a \cdot \cos\widehat{C} \\ a &= b \cdot \cos\widehat{C} + c \cdot \cos\widehat{B} \end{aligned}}$$

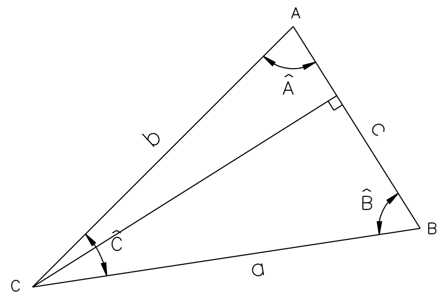

Fig. 5.13. : Relation des cosinus

4.1.4 Théorème de Pythagore généralisé

Dans le triangle ABC (fig. 5.14.), on peut écrire la relation vectorielle suivante : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Si l'on en fait le produit scalaire membre à membre, on obtient : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$.

En distribuant, il vient :

$AC^2 = AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + BC^2$.

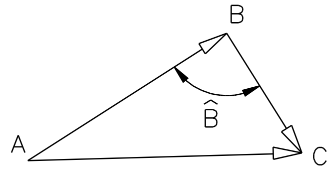

Fig. 5.14. : Pythagore

En écrivant le produit scalaire, il vient :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}) = AB \cdot BC \cdot \cos(200 - \widehat{B}) = -AB \cdot BC \cdot \cos\widehat{B}$$

On obtient finalement :

On démontre de même que :

$$\boxed{\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B} \\ c^2 &= b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos\widehat{C} \\ a^2 &= c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos\widehat{A} \end{aligned}}$$

4.1.5 Relation des tangentes

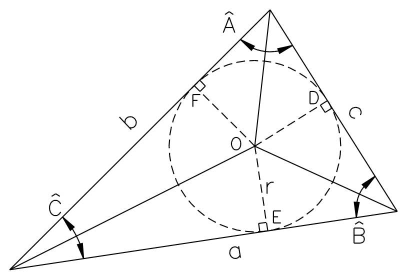

Fig. 5.15. : Relation des tangentes

Considérons le cercle de rayon r inscrit dans le triangle ABC. Soient D, E et F les points de tangence du cercle inscrit avec les côtés du triangle (fig. 5.15.). On peut écrire :

$$c = \mathrm{BD} + \mathrm{DA}$$
$$a = \mathrm{BE} + \mathrm{EC}$$
$$b = \mathrm{AF} + \mathrm{FC}$$

Comme AD = AF, CF = CE et BE = BD, on obtient :

$$a+b+c = 2.(\mathrm{BD} + \mathrm{AF} + \mathrm{CE}).$$

On pose $p = \dfrac{a+b+c}{2}$; p est appelé demi-périmètre. On en déduit que :

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AF} = p - \mathrm{BD} - \mathrm{CE} = p - a$$
$$\mathrm{BD} = \mathrm{BE} = p - \mathrm{AF} - \mathrm{CE} = p - b$$
$$\mathrm{CE} = \mathrm{CF} = p - \mathrm{BD} - \mathrm{AF} = p - c$$

De plus : $r = \mathrm{AF}\,.\tan(\widehat{A}/2) = \mathrm{BD}\,.\tan(\widehat{B}/2) = \mathrm{CE}\,.\tan(\widehat{C}/2)$.

Donc :

$$\boxed{r = (p-a)\cdot\tan(\widehat{A}/2) = (p-b)\cdot\tan(\widehat{B}/2) = (p-c)\cdot\tan(\widehat{C}/2) \quad \text{avec } p = \frac{a+b+c}{2}}$$

4.1.6 Relations faisant intervenir le cercle exinscrit

Le cercle centré au point O′ est appelé cercle exinscrit au triangle ABC et associé à l'angle $\hat{A}$. On note son rayon R_a. Ce cercle est tangent à la base a et aux côtés AC et AB mais sur ces deux derniers, les points de tangence sont à l'extérieur du triangle (fig. 5.16.).

Il existe donc trois cercles exinscrits par triangle. Nous n'étudions qu'un seul cas, les autres relations en sont déduites par permutation d'indice.

On peut écrire que : $\boxed{\tan(\widehat{A}/2) = \dfrac{R_a}{p} = \dfrac{r}{p-a}}$

Démonstration : cela revient à démontrer que : AT = AT′ = p.

AT = AT′ donc 2 . AT = AT + AT′ or 2 . AT = (AB + BT) + (AC + CT′).

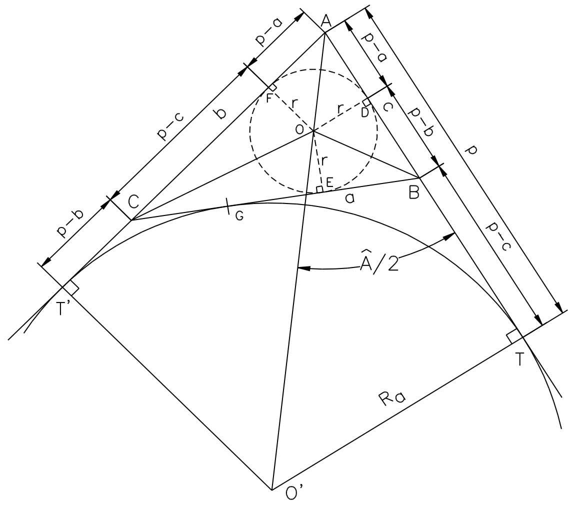

Fig. 5.16. : Cercles inscrits et exinscrits au triangle ABC

On fait intervenir G, point de tangence entre le segment BC et le cercle exinscrit :
2 . AT = (AB + BG) + (AC + CG) puisque BG = BT et CG = CT′.
Donc 2 . AT = AB + (BG + CG) + AC = AB + AC + BC.
Finalement, 2 . AT = 2 . *p* d'où AT = AT′ = *p*.

4.2 Surface d'un triangle

4.2.1 Surface d'un triangle à partir de la hauteur du triangle

La surface totale *S* du triangle ABC (fig. 5.17.) est la somme des surfaces des triangles AHC et AHB. Soit :

$$S = \frac{h_a \cdot \mathrm{CH}}{2} + \frac{h_a \cdot \mathrm{BH}}{2}$$

$$S = \frac{h_a}{2}(\mathrm{CH} + \mathrm{BH})$$

Donc : $$\boxed{S = \frac{a h_a}{2}}$$

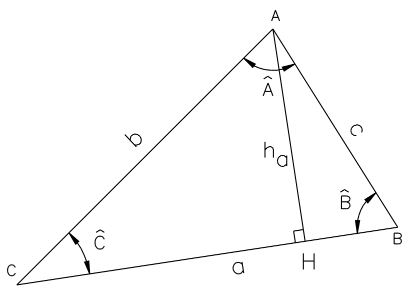

Fig. 5.17. : Surface du triangle ABC

La formule peut être écrite de même avec h_b et h_c, les hauteurs perpendiculaires aux côtés *b* et *c*.

4.2.2 Surface d'un triangle à partir du produit vectoriel

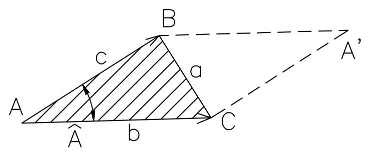

Fig. 5.18. : Aire du demi-parallélogramme

C'est la formule la plus employée (fig. 5.18.). La surface du parallélogramme A-B-A′-C s'exprime comme la norme du produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

La surface totale du parallélogramme est : $S_t = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{A}$

Donc : $S_t = b.c.\sin\widehat{A}$.

La surface S du triangle ABC est la moitié de la surface totale :

$$\boxed{S = \frac{bc \cdot \sin\widehat{A}}{2} = \frac{ab \cdot \sin\widehat{C}}{2} = \frac{ac \cdot \sin\widehat{B}}{2}}$$

4.2.3 Surface d'un triangle à partir du rayon du cercle inscrit ou du rayon du cercle exinscrit

La surface totale peut être considérée comme la somme des surfaces des triangles ADO, AFO, BDO, BEO, CEO et CFO (fig. 5.15.), donc :

$$S = \frac{r\mathrm{AC}}{2} + \frac{r\mathrm{AF}}{2} + \frac{r\mathrm{BC}}{2} + \frac{r\mathrm{BE}}{2} + \frac{r\mathrm{CE}}{2} + \frac{r\mathrm{CF}}{2} = \frac{r}{2}.(\mathrm{AC+BC+BE+CE+AF+CF}) = rp$$

En rapprochant ce résultat de celui du paragraphe 4.1.6., on obtient :

$$\boxed{S = pr = (p-a) \cdot R_a = (p-b) \cdot R_b = (p-c) \cdot R_c}$$

4.2.4 Surface d'un triangle à partir du demi-périmètre *p*

Si l'on connaît les trois côtés d'un triangle, sa surface s'exprime par :

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Démonstration : le raisonnement est mené à partir de la figure 5.17.

$S = \frac{bc}{2} \cdot \sin\widehat{A}$ d'où $\sin\widehat{A} = \frac{2S}{bc}$;

et $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A}$ d'où $\cos\widehat{A} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$;

$\cos^2\widehat{A} + \sin^2\widehat{A} = 1$ d'où $16S^2 + (a^2 - b^2 - c^2)^2 = (2bc)^2$ et $16S^2 = (2bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2$

En factorisant, on obtient : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

4.2.5 Surface d'un triangle à partir du rayon du cercle circonscrit

Le cercle circonscrit de rayon R et de centre O passe par les trois sommets du triangle ABC (fig. 5.19.) dont la surface vaut :

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R}}$$

Démonstration :

$S_{\text{ABC}} = S_{\text{OAB}} + S_{\text{OAC}} + S_{\text{OBC}}$

$2.S_{\text{OAB}} = R^2.\sin(2.\widehat{C})$

$2.S_{\text{OAC}} = R^2.\sin(2.\widehat{B})$

$2.S_{\text{OBC}} = R^2.\sin(2.\widehat{A})$

$2.S_{\text{ABC}} = R^2.[\sin(2.\widehat{A}) + \sin(2.\widehat{B}) + \sin(2.\widehat{C})]$

$\sin(2.\widehat{A}) + \sin(2.\widehat{B}) = 2.\sin(\widehat{A}+\widehat{B}).\cos(\widehat{A}-\widehat{B})$

$\sin(2.\ \widehat{C}) = \sin(400 - 2.\widehat{A} - 2.\widehat{B})$

$\qquad = -\sin[2.(\widehat{A}+\widehat{B})]$

$\qquad = -2.\sin(\widehat{A}+\widehat{B}).\cos(\widehat{A}+\widehat{B})$

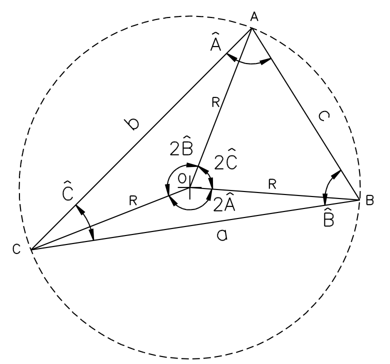

Fig. 5.19. : Cercle circonscrit au triangle

Donc : $\sin(2.\widehat{A}) + \sin(2.\widehat{B}) + \sin(2.\widehat{C}) = 4.\sin\widehat{A}.\sin\widehat{B}.\sin\widehat{C}$ en remarquant que $\sin(\widehat{A}+\widehat{B}) = \sin\widehat{C}$

$$S_{\text{ABC}} = 2.R^2.\sin\widehat{A}.\sin\widehat{B}.\sin\widehat{C} = 2R^2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

4.2.6 Surface d'un triangle à partir d'un côté et des deux angles adjacents

La surface S est décomposée en deux surfaces par la hauteur CH (fig. 5.20.). On peut alors écrire :

$$S = \frac{hc}{2} \text{ de plus } \operatorname{cotan}\widehat{A} = \frac{x}{h} \text{ et } \operatorname{cotan}\widehat{B} = \frac{y}{h}$$

$$\operatorname{cotan}\widehat{A} + \operatorname{cotan}\widehat{B} = \frac{x+y}{h} = \frac{c}{h} = \frac{c^2}{2S}$$

Donc : $\boxed{S = \dfrac{c^2}{2(\operatorname{cotan}\widehat{A} + \operatorname{cotan}\widehat{B})}}$

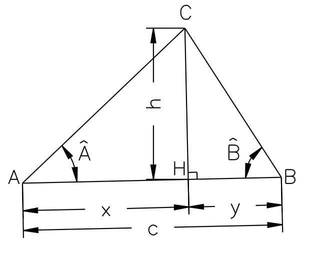

Fig. 5.20. : Surface d'un triangle

4.3 Résolution de triangles

Pour alléger les notations, on note A, B et C les angles opposés aux côtés a, b et c.

4.3.1 Un angle C et ses deux côtés adjacents a et b sont connus

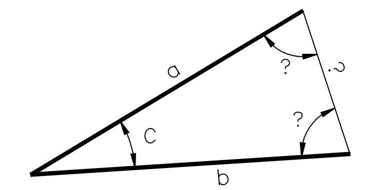

Fig. 5.21. : Deux cotés et un angle connus

Calcul de c : $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$

Calcul de A : $a^2 = c^2 + b^2 - 2.c.b.\cos A$

ou bien : $b = a.\cos C + c.\cos A$

Calcul de B : $b^2 = a^2 + c^2 - 2.c.a.\cos B$

ou bien : $a = b.\cos C + c.\cos B$

Cette solution est unique.

On vérifie que $A + B + C = 200$ gon.

Exemple

$C = 28{,}654$ gon ; $a = 151{,}46$ m ; $b = 212{,}28$ m.

Résultats

$c = 100{,}52$ m ; $A = 45{,}513$ gon ; $B = 125{,}833$ gon ; $S = 6\,993{,}8798$ m^2.

4.3.2 Les trois côtés a, b et c sont connus

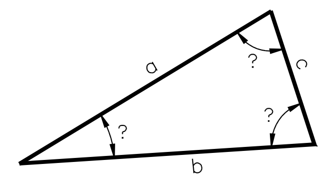

Fig. 5.22. : Trois cotés connus

Calcul de C : $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$

Calcul de A : $a^2 = c^2 + b^2 - 2.c.b.\cos A$

ou bien : $b = a.\cos C + c.\cos A$

Calcul de B : $b^2 = a^2 + c^2 - 2.c.a.\cos B$

ou bien : $a = b.\cos C + c.\cos B$

Cette solution est unique.

On vérifie que $A + B + C = 200$ gon.

Exemple

$a = 151{,}46$ m ; $b = 212{,}28$ m ; $c = 98{,}45$ m.

Résultats

$C = 27{,}704$ gon ; $A = 44{,}926$ gon ; $B = 127{,}370$ gon ; $S = 6\,777{,}1145$ m^2.

4.3.3 Un côté *b* et les deux angles adjacents *C* et *A* sont connus

Calcul de B : $A+B+C = 200$ gon

Calcul de a et c :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Cette solution est unique.

On vérifie que $c = a \, . \cos B + b \, . \cos A$.

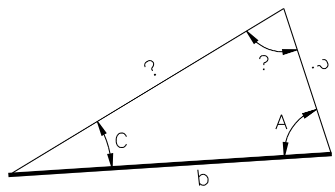

Fig. 5.23. : Deux angles et un coté connus

Exemple

b = 151,46 m ; A = 44,926 gon ; C = 34,343 gon.

Résultats

B = 120,731 gon ; a = 103,68 m ; c = 82,12 m ; S = 4033,2002 m^2.

4.3.4 Les trois angles *A*, *B* et *C* sont connus

Ce cas admet une infinité de solutions qui sont des triangles homothétiques. La figure ci-contre représente deux triangles homothétiques (fig. 5.24.).

Pour obtenir une seule solution, il faut connaître l'un des côtés.

Cela revient à la résolution du paragraphe 4.3.3.

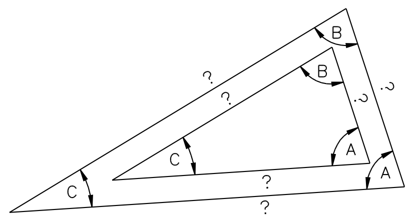

Fig. 5.24. : Trois angles connus

Exemple

A = 44,926 gon ; B =120,731 m ; C = 34,343 gon ; a = 91,46 m.

Résultats

b = 133,61 m ; c = 72,44 m.

4.3.5 Un angle *C*, un côté adjacent *b* et le côté opposé *c* sont connus

Ce cas est appelé cas douteux car il peut admettre zéro, une ou deux solutions. Nous discuterons graphiquement de l'existence de ces solutions.

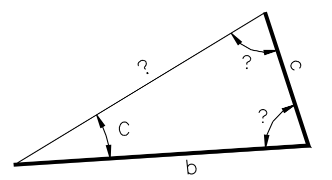

Fig. 5.25. : Deux cotés et un angle connus

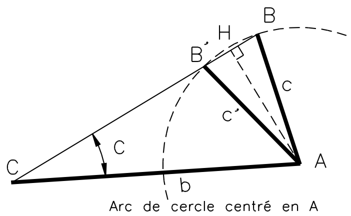

Fig. 5.26. : Deux solutions

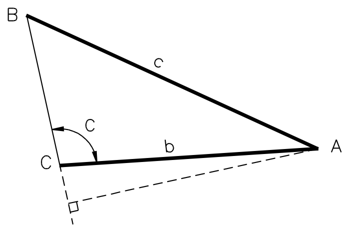

Fig. 5.27. : Une seule solution

◆ ***Si C < 100 gon (fig. 5.26.)***

Si ***c*** **< AH**, il n'y a pas de solution possible car c est « trop court ».

Si ***c*** **= AH**, il existe une solution unique qui correspond au triangle CAH rectangle en H, car AH = $b.\sin C$.

Si ***c*** **> AH**, il existe deux solutions possibles du point B puisque le cercle de centre A et de rayon c coupe la droite (CB) issue du point C en 2 points B et B′. Si l'on poursuit l'augmentation de la valeur du côté c jusqu'à atteindre la valeur b, on se retrouve dans un cas limite à partir duquel il n'y a plus qu'une seule solution possible puisqu'il n'y a plus qu'une seule intersection possible entre la droite (CB) et le cercle de centre A et de rayon c.

◆ ***Si C > 100 gon (fig. 5.27.)***

La seule possibilité pour qu'il y ait une solution au problème est que $c > b$.

Si $b = c$, le triangle est limité à une seule droite, ce qui est ne correspond pas à un problème réel.

Si $c < b$, il n'y a pas de solution possible : c est « trop court ».

Tableau récapitulatif

C < 100 gon		**C > 100 gon**	
$c < b.\sin C$	aucune solution	$c \leq b$	aucune solution
$c = b.\sin C$	une solution	$c > b$	une solution
$b.\sin C < c < b$	**deux solutions**		
$c > b$	une solution		

Résolution

L'angle B est déterminé dans l'expression $c / \sin C = b / \sin B$.

Si $b.\sin C < c$, ceci donne deux solutions B et B' :
$$\begin{cases} B = \sin^{-1}\left(\dfrac{b \cdot \sin C}{c}\right) \\ B' = 200 - B \end{cases}$$

On calcule l'angle A par : $A + B + C = 200$ gon
On calcule la côté a par : a / sin$A$ = c / sin$C$

Le calcul de A' est identique.
Le calcul de a' est identique.

On vérifie que $c = a \,.\, \cos B + b \,.\, \cos A$.

Exemple

c = 191,46 m ; b = 212,28 m ; C = 71,002 gon.

Résultats

C < 100 gon et $b > c > b.\sin C$ = 190,64 m, donc il y a deux solutions.
Première solution : B = 94,092 gon ; A = 34,906 gon ; a = 111,13 m.
Seconde solution : B' = 105,908 gon ; A' = 23,090 gon ; a'= 75,64 m.

4.3.6 Résolution graphique

AutoCAD LT

L'environnement de travail est défini dans le menu FORMAT / CONTROLE DES UNITES : zéro des angles au nord, sens de rotation horaire, angles en grades avec trois chiffres significatifs, longueurs en unités décimales avec deux chiffres significatifs.

Droite CA : *LIGNE*↵ d'un point quelconque à *@212.28<100*↵

Droite CB : *LIGNE*↵ depuis le point C (utilisez l'accrochage *EXTrémité*) à *@200<–371.002*↵

Position de la droite AB : *CERCLE*↵ de centre le point A (utilisez l'accrochage *EXTrémité*) et de rayon *191.46*↵

Droites AB possibles : tracez deux lignes depuis le centre du cercle jusqu'aux deux points d'intersection du cercle et de la droite CB.

Il reste à mesurer les deux longueurs possibles CB et CB′ avec la commande *DISTANCE*↵ et les angles A, A', B et B' par exemple avec des cotations angulaires (menu COTATION / ANGULAIRE).

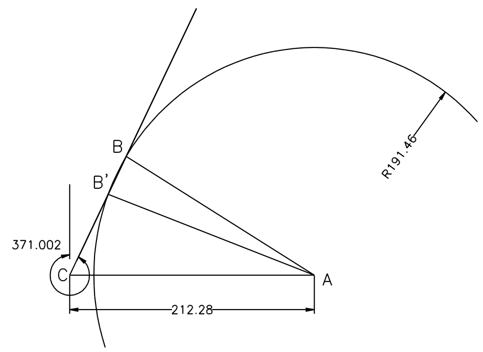

Fig. 5.28-a. : Solution graphique

4.3.7 Programmation en basic standard de la résolution de triangles

Le programme suivant regroupe les quatre cas de figure possibles de la résolution d'un triangle. Il est donné en BASIC standard (avec les numéros de ligne) pour être adapté aux calculatrices programmables.

Trois données sont nécessaires. Les variables contenant les angles sont notées AA, AB et AC. Celles qui contiennent les cotés sont notées CA, CB, CC. Par convention, le côté CA est opposé à l'angle AA.

```
1 PRINT "Résolution de triangles"
2 INPUT "(1)ABc (2)abc (3)abC (4)abA"; NU
3 ON NU GOTO 10, 100, 200, 300
4 END
5 REM On connaît un côté et deux angles adjacents
10 INPUT "Côté c (m) "; CC
20 INPUT "Angle A (gon)"; AA
30 INPUT "Angle B (gon) "; AB
40 AC = 200 – AA – AB : REM Calcul direct de l'angle C
50 CB = CC / SIN(AC) * SIN(AB) : REMCalcul direct du côté b
60 CA = CC / SIN(AC) * SIN(AA) : REM Calcul direct du côté a
80 PRINT "Angle C : "; AC ;"gon" : REMAffichage des résultats
90 PRINT "Côté b : ";CB; " m"
95 PRINT "Côté a : ";CA; " m" : END
99 REM Trois cotés connus
100 INPUT "Côté a (m) "; CA
120 INPUT "Côté b (m) "; CB
130 INPUT "Côté c (m) "; CC
140 AA = ARCCOS((CC^2+CB^2–CA^2)/(2*CC*CB))
145 IF AA < 0 THEN AA=AA+200 : REM si A négatif, ajouter 200 gon
150 AB = ARCCOS((CA^2+CC^2–CB^2)/(2*CA*CC))
160 IF AB < 0 THEN AB=AB+200 : REM si B négatif ajouter 200 gon
180 PRINT "Angle A : "; AA ;"gon"
190 PRINT "Angle B : "; AB ;"gon"
195 PRINT "Angle C : "; 200 – AA – AB ;"gon" : END
199 REM  un angle et deux côtés adjacents connus
200 INPUT "Longueur du côté a (m) "; CA
220 INPUT "Longueur du côté b (m) "; CB
230 INPUT "Angle C (gon) "; AC
240 CC = SQR(CA^2+CB^2–2*CA*CB*COS(AC))
250 AB = ARCCOS((CA^2+CC^2–CB^2)/(2*CA*CC))
260 IF AB < 0 THEN AB=AB+200 : REM si B négatif, ajouter 200 gon
```

```
280 PRINT "Angle A : "; 200 – AB – AC ;"gon"
290 PRINT "Angle B : "; AB ;"gon"
295 PRINT "Côté c : "; CC ;"m" : END
299 REM On connaît un angle, le côté opposé et un autre côté
300 INPUT "Longueur du côté a (m) "; CA
320 INPUT "Longueur du côté b (m) "; CB
330 INPUT "Angle A (gon) "; AA
340 IF CA<CB*SIN(AA) THEN GOTO 390 : REM Cas sans solution (aller en 390)
345 IF CA=CB*SIN(AA) AND AA>=100 THEN GOTO 390
350 IF CA>CB*SIN(AA) AND AA>100 AND CA<=CB THEN GOTO 390
355 AB = ARCSIN(CB*SIN(AA)/CA) : AC = 200 – AA – AB
360 PRINT "Solution 1" : PRINT "Angle B (gon) ";AB
363 PRINT "Angle C (gon) ";AC
364 PRINT "Côté c (m) ";SIN(AC)*CA/SIN(AA)
365 IF CA>CB*SIN(AA) AND AA<100 AND CA<CB THEN GOTO 375
370 PRINT "Solution unique" : END : REM Fin du cas à une seule solution
375 PRINT "Solution 2" : REM Début du calcul de la 2e solution
380 PRINT "Angle B' (gon) "; 200–AB
381 PRINT "Angle C' (gon) ";AB – AA
385 PRINT "Côté c' (m) ";SIN(AB–AA)*CA/SIN(AA) : END
390 PRINT "Pas de solution" : END
```

Ce programme est donné sur le cédérom du livre sous forme de fichier (TRIANGLE.BAS) lisible par le programme QBASIC.EXE livré avec le DOS (à partir de la version 5.0). Le listing est dans le fichier TRIANGLE.TXT.

Remarques

- Le listing ci-dessus est donné pour une calculatrice programmable en BASIC standard et réglée en mode grades. Le listing du programme TRIANGLE.BAS (sur le cédérom) fait apparaître des conversions d'angles de radians en grades (et inversement) puisque l'ordinateur travaille en radian.
- Le listing ci-dessus suppose que votre Basic dispose des deux fonctions arccos( ) et arcsin( ). Si ce n'est pas le cas, vous disposez d'au moins l'une d'entre elles, par exemple arcsin( ), et vous obtiendrez l'autre grâce à la transformation suivante : ALPHA = arcsin(SQR(1 – COSINUS ^2)). Cette expression permet de mettre dans la variable alpha la valeur de l'angle dont le cosinus est stocké dans la variable cosinus. Elle remplace donc la fonction arccos( ). Alpha est donné en grades si la machine est réglée en mode grades lors de l'exécution du programme. Par exemple, la ligne 250 du programme ci-dessus deviendrait :

  ```
  250 AB = ARCSIN(SQR (1 – ((CA^2+CC^2–CB^2)/(2*CA*CC))^2 ))
  ```